משוואות דיפרנציאליות חלקיות

90915

מכללת אפקה

נושא 1 - משוואת גלים הומוגנית בקטע אינסופי

צורה כללית של בעיית גלים הומוגנית בקטע אינסופי:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

פתרון בעיית גלים הומוגנית בקטע אינסופי לפי נוסחת ד'אלמבר:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds$$

נושא 2 - משוואת גלים הומוגנית בקטע חצי אינסופי

צורה כללית של בעיית גלים הומוגנית בקטע חצי אינסופי:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x < \infty \\ u(0,t) = 0 \ \ or \ \ u_x(0,t) = 0 & t \ge 0 \end{cases}$$

$u(0,t) = 0$, אי-זוגית

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \ge 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$u_x(0,t) = 0$, הרחבה זוגית

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \ge 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

נושא 3 - בעיית שטורם ליוביל ופיתוח טור פונקציות עצמיות

בעיית שטורם ליוביל

משוואה דיפרנציאלית רגילה עם מקדמים קבועים: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

משוואה אופיינית מתאימה: $ar^2 + br + c = 0$

צורת הפתרון:

שורשי המשוואה האופיינית	צורת הפתרון
שני שורשים ממשיים שונים $r_1 \neq r_2$	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
שורש אחד כפול $r_1 = r_2 = r$	$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
שני שורשים מרוכבים צמודים $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$	$y(x) = C_1 e^{\lambda x} cos(\mu x) + C_2 e^{\lambda x} sin(\mu x)$

עבור בעיית שטורם ליוביל מהצורה: $0 < x < L$ $y''(x) + \lambda y(x) = 0$

צורת פתרון:

תנאי שפה			פונקציות עצמיות	ערכים עצמיים	תחום
דירכלה	$y(L) = 0$	$y(0) = 0$	$y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$	$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$	$n \geq 1$
מעורב 1	$y(L) = 0$	$y'(0) = 0$	$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2L}\right)$	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}\right)^2$	$n \geq 1$
מעורב 2	$y'(L) = 0$	$y(0) = 0$	$y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2L}\right)$	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}\right)^2$	$n \geq 1$
נוימן	$y'(L) = 0$	$y'(0) = 0$	$y_0(x) = 1$	$\lambda_0 = 0$	$n = 0$
			$y_n(x) = cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$	$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$	$n \geq 1$

פיתוח פונקציה לטור של פונקציות עצמיות

נניח כי $\{\varphi_n(x)\}$ סדרת פונקציות עצמיות שהתקבלה מבעיית שטורם ליוביל. טור פונקציות עצמיות של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ נתון ע"י:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}$$

$$f(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

נושא 4 - משוואת גלים בקטע סופי

צורה כללית של בעיית גלים בקטע סופי:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(u_x, u_t, u) + G(x,t) & 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le L \\ \begin{cases} u(0,t) = \alpha(t) \ , \ u(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \\ \qquad or & \\ u_x(0,t) = \alpha(t) \ , \ u(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \\ \qquad or & \\ u(0,t) = \alpha(t) \ , \ u_x(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \\ \qquad or & \\ u_x(0,t) = \alpha(t) \ , \ u_x(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

משוואה הומוגנית – כאשר $G(x,t) = 0$, כלומר כל הגורמים במשוואת הגלים תלויים ב- u

תנאיי שפה הומוגניים – אם $\alpha(t) = 0$ וגם $\beta(t) = 0$

פונקציית תיקון $w(x,t)$:

תנאי שפה	פונקציית תיקון $w(x,t)$
דיריכלה, מעורב 1, מעורב 2	$w(x,t) = A(t)x + B(t)$
נוימן	$w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$

נושא 6 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר 2

צורה כללית של מד"ח מסדר 2:

$$a_{11}(x,y)u_{xx}+2a_{12}(x,y)u_{xy}+a_{22}(x,y)u_{yy}+b_1(x,y)u_x+b_2(x,y)u_y+c(x,y)u+f(x,y)=0$$

סיווג המשוואה: $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

עקומות אופייניות: $y' = \dfrac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$

סוג המד"ח		פתרון עקומות אופייניות	החלפת משתנים
היפרבולית	$\Delta > 0$	$\phi(x,y)=C$ $\psi(x,y)=C$	$\xi=\phi(x,y)$ $\eta=\psi(x,y)$
פרבולית	$\Delta = 0$	$\phi(x,y)=C$	$\xi=\phi(x,y)$ $\eta=x$ או $\eta=y$ $J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$
אליפטית	$\Delta < 0$	$\phi(x,y)=C$ $\bar{\phi}(x,y)=C$	$\xi=Re\big(\phi(x,y)\big)$ $\eta=Im\big(\phi(x,y)\big)$

נגזרות u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} כתלות ב- ξ ו- η:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right)\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + \left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right)\eta_x + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\right)\xi_x + u_\xi \xi_{xy} + \left(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right)\eta_x + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\right)\xi_y + u_\xi \xi_{yy} + \left(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right)\eta_y + u_\eta \eta_{yy}$$

נושא 7 - משוואת לפלס

משוואת לפלס במלבן

צורה כללית של בעיית לפלס במלבן:

$$\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < L\ ,\ 0 < y < N \\ u(0,y) = f(y)\ \ or\ \ u_x(0,y) = f(y) & 0 \le y \le N \\ u(L,y) = g(y)\ \ or\ \ u_x(L,y) = g(y) & 0 \le y \le N \\ u(x,0) = h(x)\ \ or\ \ u_y(x,0) = h(x) & 0 \le x \le L \\ u(x,N) = k(x)\ \ or\ \ u_y(x,N) = k(x) & 0 \le x \le L\end{cases}$$

טבלת פתרון מד"ר לינארית סדר 2 עם מקדמים קבועים מהצורה $y''(x) - a^2 y(x) = 0$ כאשר $0 < x < L$

תנאי שפה	פתרון מד"ר
דירכלה	$y_n(x) = A_n \sinh(ax) + B_n \sinh\big(a(L-x)\big)$
מעורב 1	$y_n(x) = A_n \cosh(ax) + B_n \sinh\big(a(L-x)\big)$
מעורב 2	$y_n(x) = A_n \sinh(ax) + B_n \cosh\big(a(L-x)\big)$
נוימן	$y_n(x) = A_n \cosh(ax) + B_n \cosh\big(a(L-x)\big)$

משוואת לפלס במעגל

צורה כללית של בעיית לפלס במעגל בקואורדינטות קרטזיות:

$$\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & ,\ \ x^2 + y^2 < R^2 \\ u(x,y) = f(x,y)\ or\ \ u_n(x,y) = f(x,y) & ,\ \ x^2 + y^2 = R^2\end{cases}$$

צורה כללית של בעיית לפלס במעגל בקואורדינטות קוטביות (פולריות) :

$$\begin{cases}\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < R\ ,\ 0 < \theta < 2\pi \\ u(R,\theta) = f(\theta)\ or\ \ u_r(R,\theta) = f(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi\end{cases}$$

פתרון כללי של בעיית לפלס במעגל:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

משוואת לפלס בגזרה

צורה כללית של בעיית לפלס בגזרה:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & 0 < \theta < \alpha \ , 0 < r < R \\ u(R,\theta) = f(\theta) \quad or \quad u_r(R,\theta) = f(\theta) & 0 \le \theta \le \alpha \\ \begin{cases} u(r,0) = 0 \ , \ u(r,\alpha) = 0 \\ or \\ u_\theta(r,0) = 0 \ , \ u(r,\alpha) = 0 \\ or \\ u(r,0) = 0 \ , \ u_\theta(r,\alpha) = 0 \\ or \\ u_\theta(r,0) = 0 \ , \ u_\theta(r,\alpha) = 0 \end{cases} & 0 \le r \le R \end{cases}$$

משוואה דיפרנציאלית רגילה מסוג אויילר: $x^2y''(x) + \alpha xy'(x) + \beta y(x) = 0$

משוואה אופיינית מתאימה: $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$

צורת הפתרון:

מספר פתרונות של המשוואה האופיינית	**צורת הפתרון**
שני שורשים ממשיים שונים $r_1 \neq r_2$	$y(x) = C_1\|x\|^{r_1} + C_2\|x\|^{r_2}$
שורש אחד כפול $r_1 = r_2 = r$	$y(x) = C_1\|x\|^r + C_2\|x\|^r \ln\|x\|$
שני שורשים מרוכבים צמודים $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$	$y(x) = C_1\|x\|^\lambda cos(\mu \ln\|x\|) + C_2\|x\|^\lambda sin(\mu \ln\|x\|)$

משוואת לפלס בטבעת

צורה כללית של בעיית לפלס בטבעת בקואורדינטות קרטזיות:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2 \\ u(x,y) = f(x,y) \ or \ u_{n_1}(x,y) = f(x,y) & , \quad x^2 + y^2 = R_1^2 \\ u(x,y) = g(x,y) \ or \ u_{n_2}(x,y) = g(x,y) & , \quad x^2 + y^2 = R_2^2 \end{cases}$$

צורה כללית של בעיית לפלס בטבעת בקואורדינטות קוטביות (פולריות) :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & R_1 < r < R_2 \ , 0 < \theta < 2\pi \\ u(R_1,\theta) = f(\theta) \ or \ u_r(R_1,\theta) = f(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(R_2,\theta) = g(\theta) \ or \ u_r(R_2,\theta) = g(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

פתרון כללי של בעיית לפלס בטבעת:

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}[C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)]$$

<u>תנאי הכרחי לקיום פתרון בעיית נוימן</u>

צורה כלליתשל בעיית נוימן:

$$\begin{cases}\Delta u = F(x,y) & , \quad (x,y) \in D \\ u(x,y) = g(x,y) & , \quad (x,y) \in \partial D\end{cases}$$

תנאי הכרחי לקיום פתרון לבעיית נוימן:

$$\oint_{\partial D} g\, ds = \iint_{D} F(x,y)dxdy$$

<u>זהות גרין</u>

יהיו u ו- v פונקציות של 2 משתנים. מתקיים:

$$\iint_{D} u \cdot \Delta v\, dxdy = \oint_{\partial D} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} - \iint_{D} \nabla u \cdot \nabla v\, dxdy$$

<u>עקרון המקסימום של משוואת לפלס</u>

צורה כללית של בעיית דיריכלה:

$$\begin{cases}\Delta u = F(x,y) & , \quad (x,y) \in D \\ u(x,y) = g(x,y) & , \quad (x,y) \in \partial D\end{cases}$$

כאשר $F(x,y) \geq 0$

לפי עקרון המקסימום, הפונקציה $u(x,y)$ שהיא פתרון לבעיית לפלס הנתונה, מקבלת ערך מקסימלי וערך מינימלי על שפת התחום D.

נושא 8 - משוואת חום בקטע סופי

צורה כללית של בעיית חום בקטע סופי:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + F(u_x, u) + G(x,t) & 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le L \\ \begin{cases} u(0,t) = \alpha(t) \ , \ u(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \\ or & \\ u_x(0,t) = \alpha(t) \ , \ u(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \\ or & \\ u(0,t) = \alpha(t) \ , \ u_x(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \\ or & \\ u_x(0,t) = \alpha(t) \ , \ u_x(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

משוואה הומוגנית – כאשר $G(x,t) = 0$, כלומר כל הגורמים במשוואת החום תלויים ב- u

תנאיי שפה הומוגניים – אם $\alpha(t) = 0$ וגם $\beta(t) = 0$

פתרון מד"ר לינארית מסדר 1:

צורה כללית: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

גורם אינטגרציה: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, לאחר הכפלת המד"ר בגורם אינטגרציה: $\big(\mu(x) \cdot y(x)\big)' = \mathrm{g}(x)\mu(x)$

פונקציית תיקון $w(x,t)$:

תנאי שפה	**פונקציית תיקון $w(x,t)$**
דיריכלה, מעורב 1, מעורב 2	$w(x,t) = \mathrm{A}(t)x + B(t)$
נוימן	$w(x,t) = \mathrm{A}(t)x^2 + B(t)x$

עקרון המקסימום של בעיית החום

צורה כללית של בעיית דיריכלה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x < L \\ u(0,t) = \alpha(t) \ , \ u(L,t) = \beta(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

כאשר $F(x,t) \ge 0$

לפי עקרון המקסימום, הפונקציה $u(x,t)$ שהיא פתרון לבעיית החום הנתונה, מקבלת ערך מקסימלי וערך מינימלי על שפת התחום.